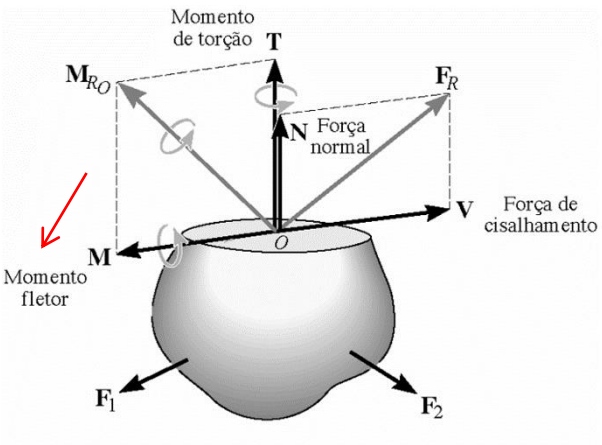
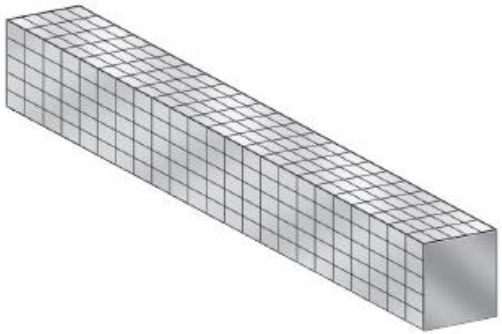
# Capítulo 6
# Flexão

# 6.1 – Deformação por flexão de um elemento reto

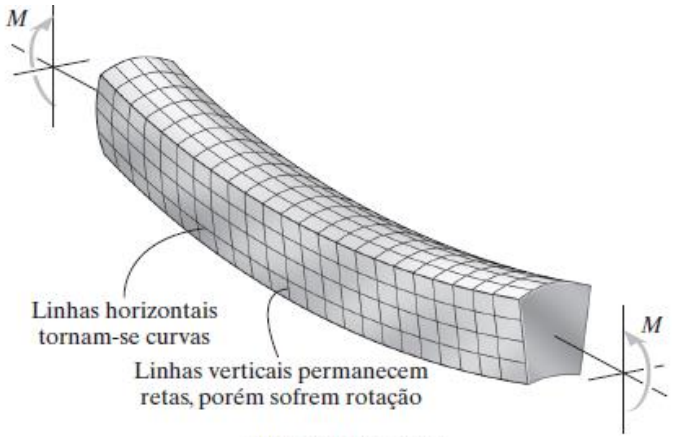
- A seção transversal de uma viga reta permanece plana quando a viga se deforma por flexão.
- Isso provoca uma tensão de tração de um lado da viga e uma tensão de compressão do outro lado.



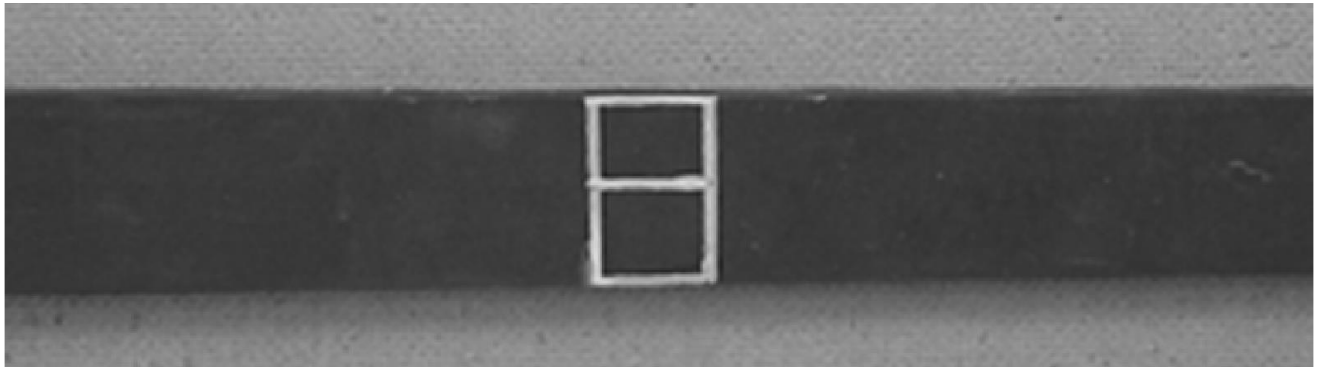
Antes da deformação

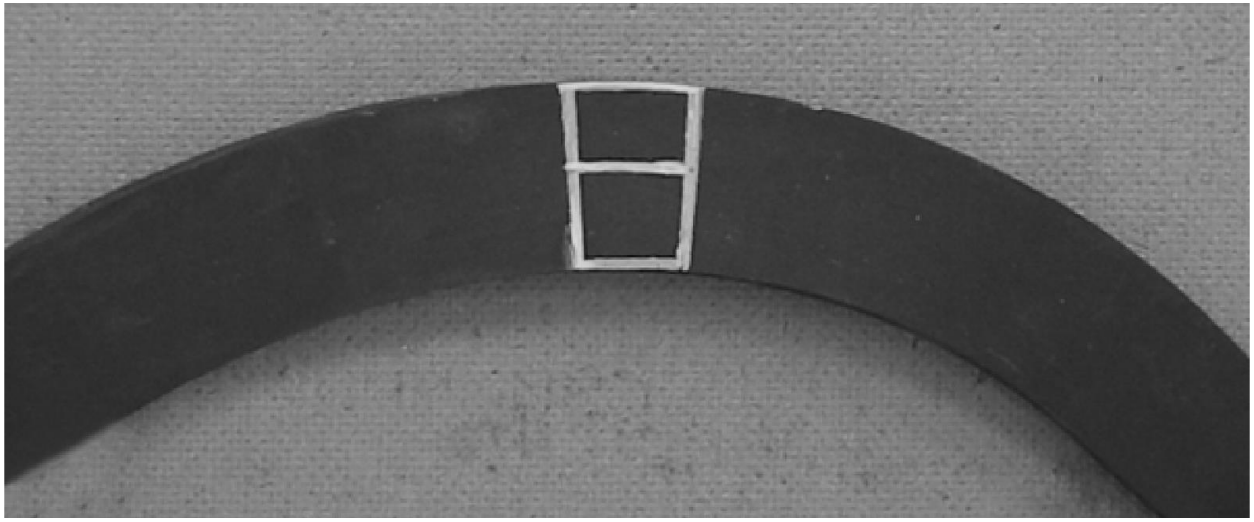
(a)



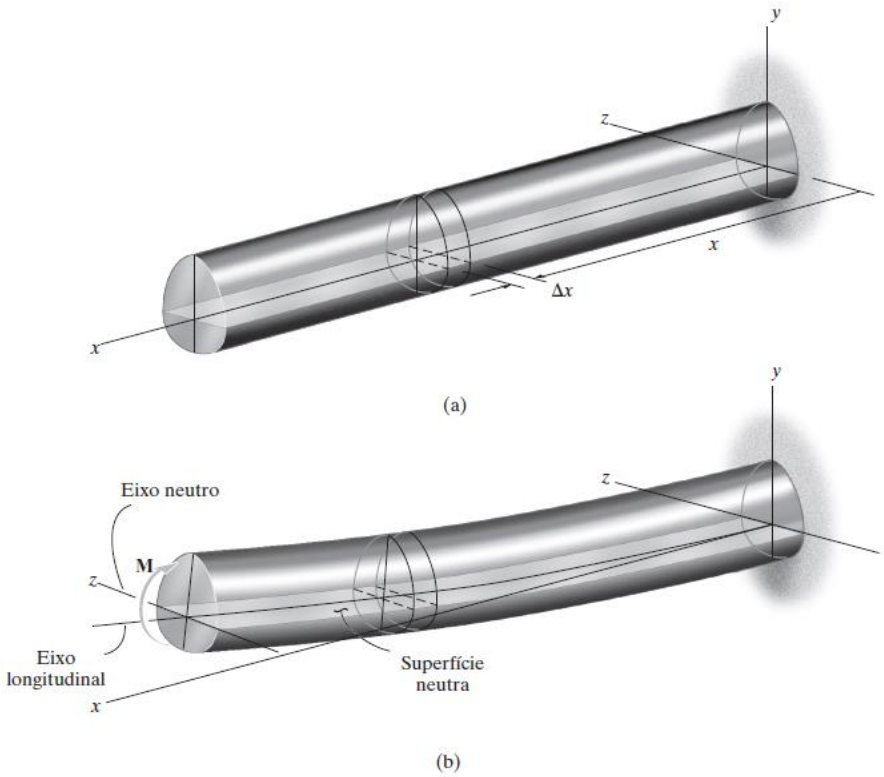

Após a deformação

(b)

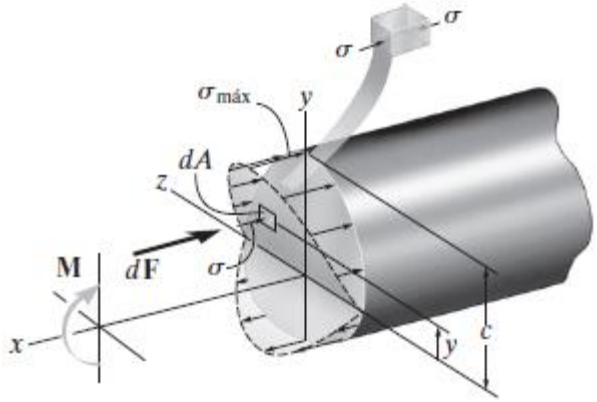




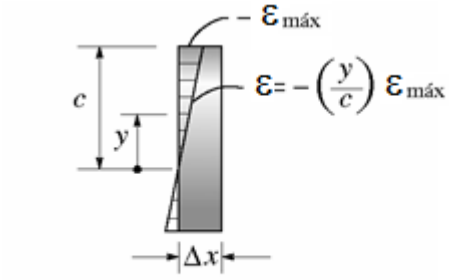
- A deformação longitudinal varia linearmente de zero no eixo neutro.
- A lei de Hooke se aplica quando o material é homogêneo.
- O eixo neutro passa pelo centroide da área da seção transversal.



# 6.2 – A fórmula da flexão




Variação da tensão de flexão




Distribuição da deformação normal

Para o equilíbrio estático:

$$\sigma = \frac{dF}{dA} \rightarrow dF = \sigma dA$$

$$M = \int_A y dF$$

$$M = \int_A y(\sigma dA) = \int (y)\left(\frac{y}{c}\sigma_{max}\right) dA$$

$$M = \frac{\sigma_{max}}{c}\int y^2 dA = \frac{\sigma_{max} I}{c}$$

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I}$$

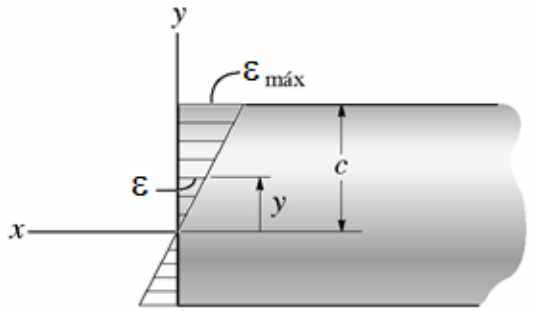
Substituindo em $\sigma = -\frac{y}{c}\sigma_{max}$

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

O momento resultante na seção transversal é igual ao momento produzido pela distribuição linear da tensão normal em torno do eixo neutro.

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

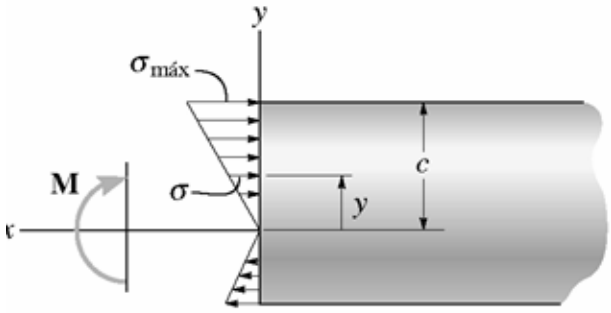
$\sigma$ = tensão normal no membro
$M$ = momento interno
$I$ = momento de inércia
$y$ = distância perpendicular do eixo neutro
c=distância perpendicular do eixo neutro a um ponto mais afastado do eixo neutro onde a tensão máxima




Variação da deformação normal (vista lateral)

(a)

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z}$$




Variação da tensão de flexão (vista lateral)

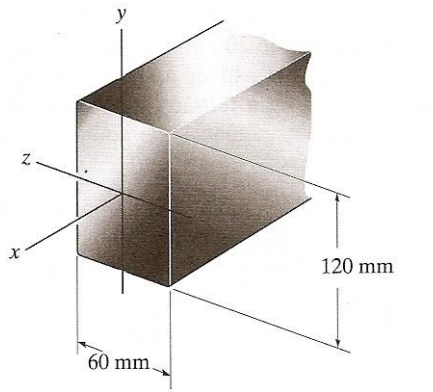
(b)

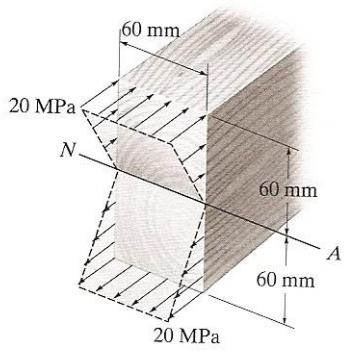
# Exemplo 1 -

A viga tem seção transversal retangular e está sujeita à um momento interno M=2,88kNm na seção transversal 60x120mm. Determine a distribuição de tensão pela fórmula da tensão.

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(60mm)\times(120mm)^3}{12} = 864\times10^4\, mm^4$$

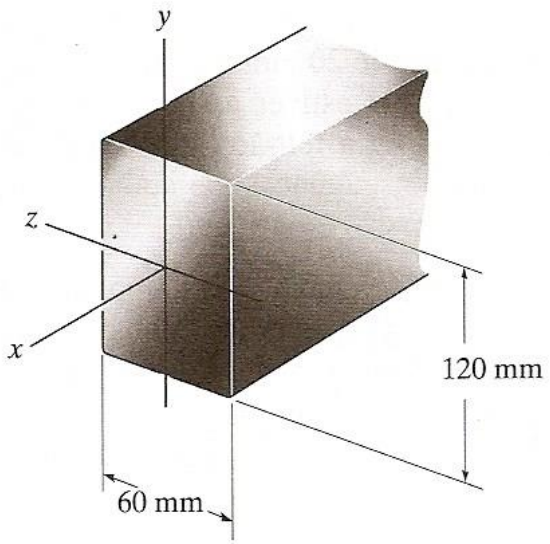
$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} \rightarrow \sigma_{\max} = \frac{2{,}88\times10^6\, Nmm\times60mm}{864\times10^4\, mm^4} = 20N/mm^2 = 20MPa$$



# Exercício de fixação –

1) Um elemento com as dimensões mostradas na figura deverá ser usado para resistir a um momento fletor interno M=2kNm. Determine a tensão máxima no elemento se o momento for aplicado (a) em torno do eixo z e (b) em torno do eixo y. Respostas: (a)13,9MPa (b) 27,8MPa



# Exercício de fixação –

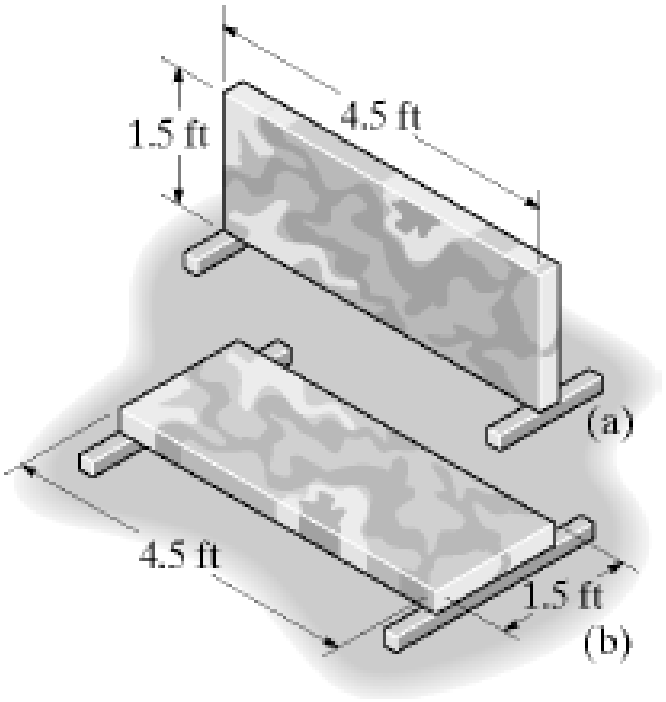
2) A peça de mármore, que podemos considerar como um material linear elástico frágil, tem peso específico de 150lb/ft$^3$ e espessura de 0,75in. Calcule a tensão de flexão máxima na peça se ela estiver apoiada (a) em seu lado e (b) em suas bordas. Se a tensão de ruptura for $\sigma_{rup}$=200psi, explique as consequências de apoiar a peça em cada uma das posições.

Respostas:

(a) 10,5psi

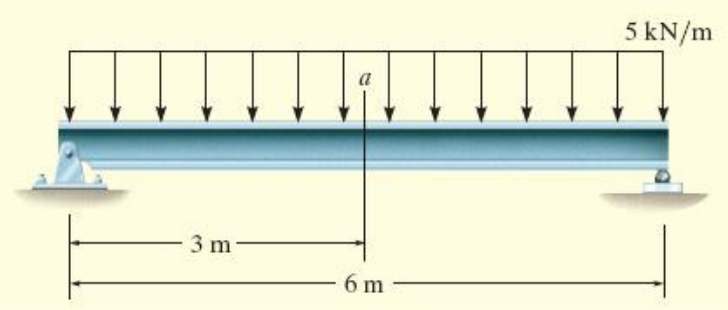
(b) 253psi

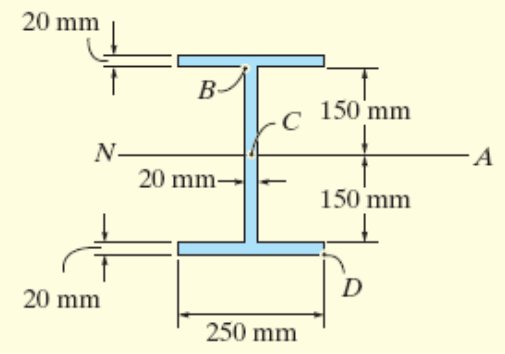
na posição b a peça irá quebrar



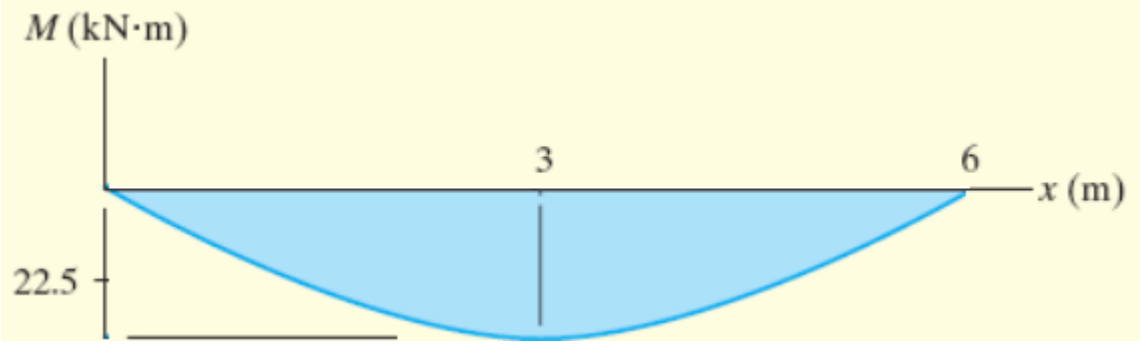
# Exemplo 2 -

A viga simplesmente apoiada tem a área de seção transversal mostrada na figura abaixo. Determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga e represente a distribuição de tensão na seção transversal nessa localização.



O momento máximo interno na viga é $M = \frac{qL^2}{8} = 22{,}5 \text{ kNm}$

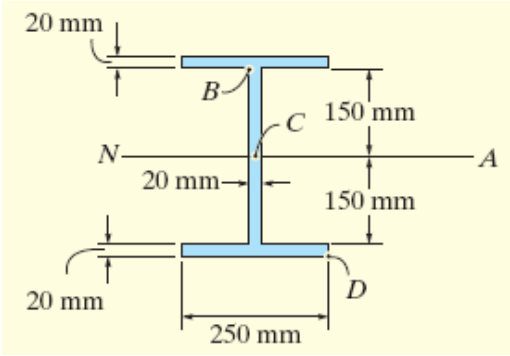



Por razões de simetria, o centroide $C$ e, portanto, o eixo neutro, passa a meia altura da viga, e o momento de inércia é

$$I = \sum\left(\bar{I} + Ad^2\right)$$

$$= 2\left[\frac{1}{12}(0{,}25)(0{,}02)^3 + (0{,}25)(0{,}02)(0{,}16)^2\right] +$$

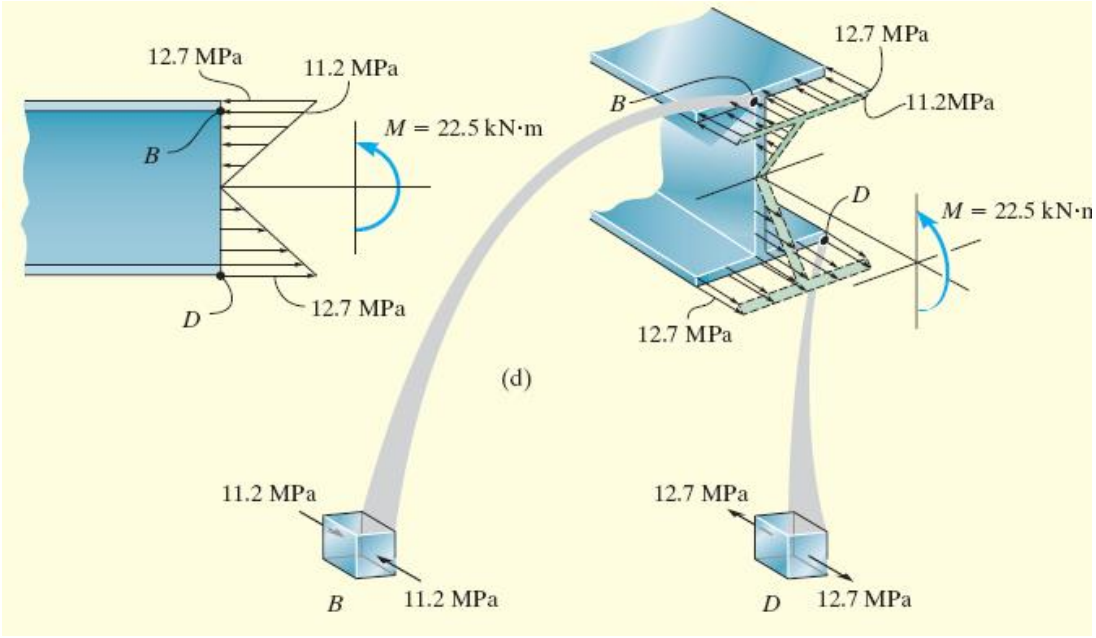
$$\left[\frac{1}{12}(0{,}02)(0{,}3)^3\right] = 301{,}3\left(10^{-6}\right) \text{ m}^4$$



Aplicando a fórmula da flexão, para c = 170 mm,

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I}; \qquad \sigma_{máx} = \frac{22{,}5(0{,}17)}{301{,}3\left(10^{-6}\right)}$$

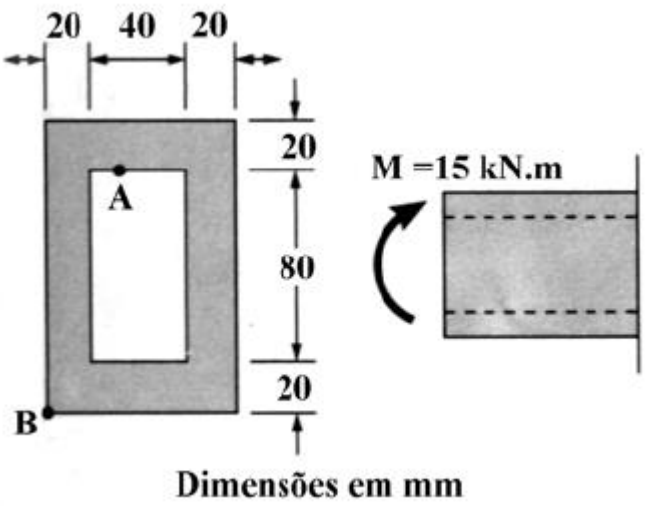
$$\boxed{\sigma_{máx} = 12{,}7 \text{ MPa}}$$



# Exercício de Fixação-

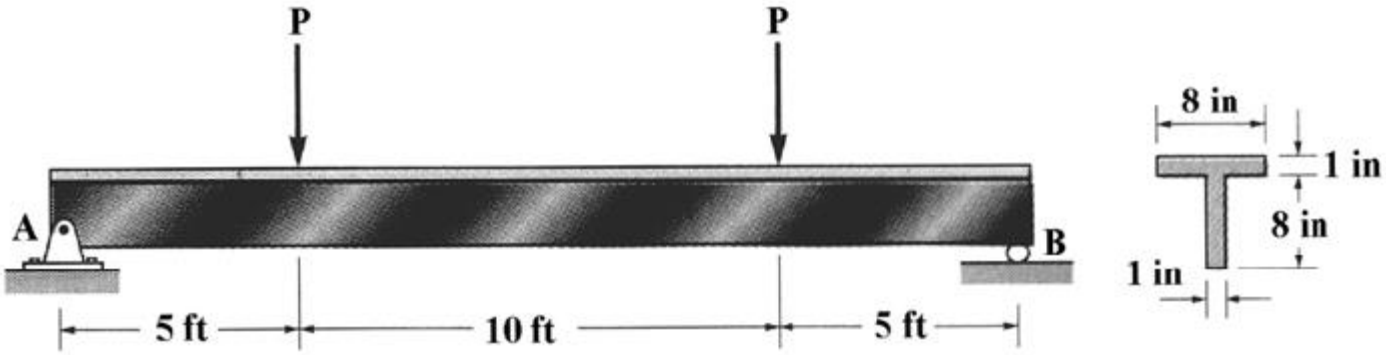
3) O momento fletor indicado na figura atua no plano vertical. Determinar as tensões normais nos pontos A e B sobre a seção transversal mostrada.

Respostas: $\sigma_A = -61{,}1 MPa$ $\sigma_B = 91{,}7 MPa$



4) Determine o máximo valor para as forças P que podem ser aplicadas a viga da figura sabendo que a mesma é construída com um material para o qual valem $\left(\sigma_{adm}\right)_C = -12ksi$ e $\left(\sigma_{adm}\right)_T = 22ksi$

Respostas: $7{,}29kip$



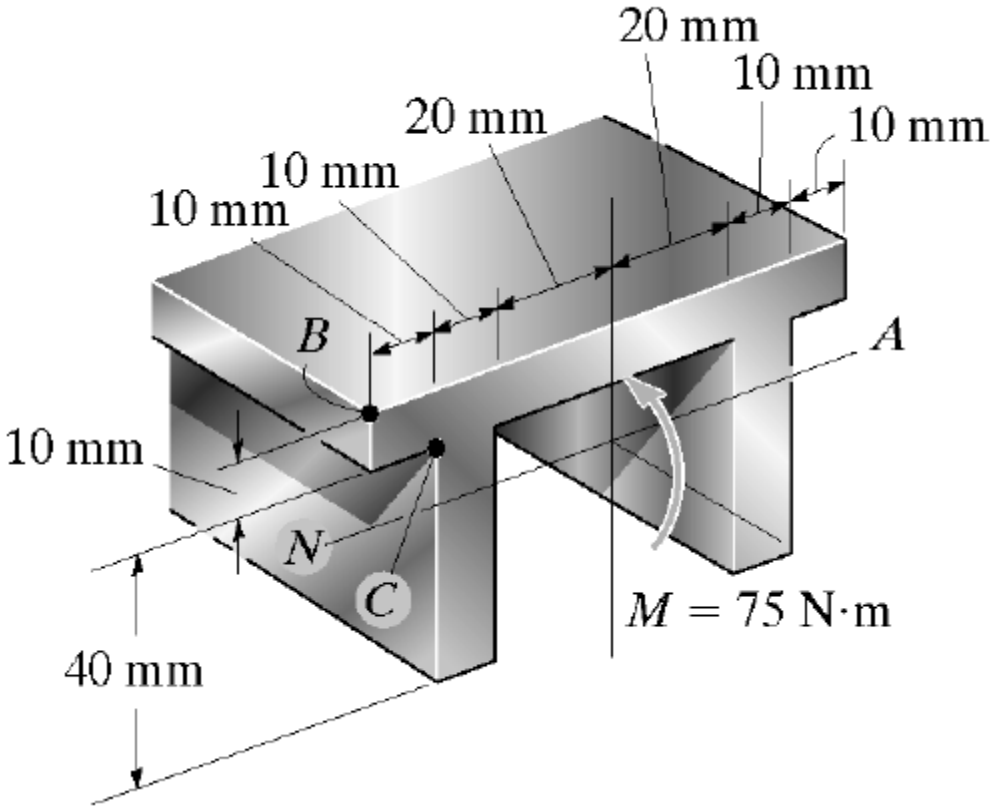
5) A peça da máquina feita de alumínio está sujeita a um momento M=75Nm. Determine as tensões de flexão máximas tanto de tração quanto de compressão na peça. Determinar a tensão de flexão criada nos pontos B e C. Respostas:

$\left(\sigma_{máx}\right)_C$ = -3,61MPa

$\left(\sigma_{máx}\right)_T = 6{,}71 MPa$

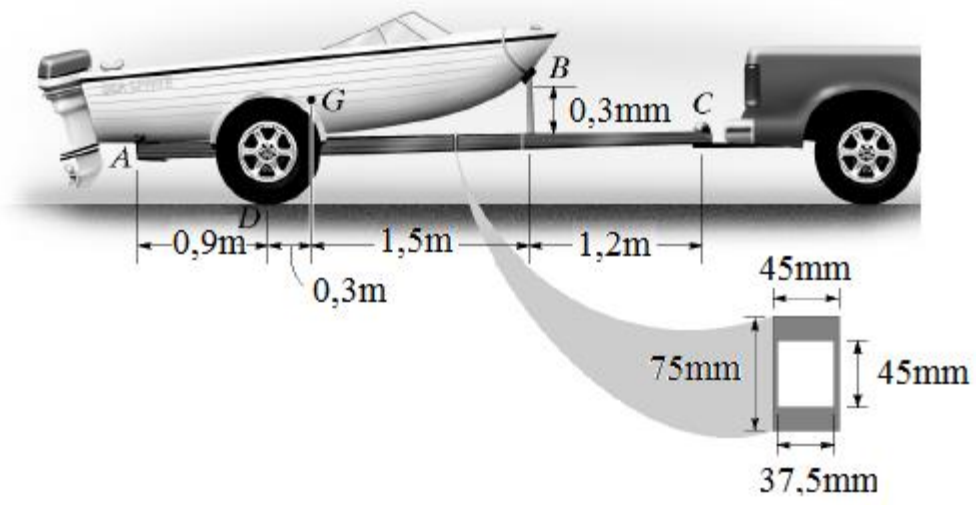
$\sigma_B$ = -3,61MPa

$\sigma_C$ = -1,55MPa



6) O barco pesa 11,5kN e tem centro de gravidade em G. Se estiver apoiado no reboque no contato liso A e preso por pino em B, determine a tensão de flexão máxima absoluta desenvolvida na escora principal do reboque. Considere que a escora é uma viga- caixão com dimensões mostradas na figura e presa por um pino em C.

Resposta: $\sigma_{máx} = 166{,}7 MPa$



# 6.3 – Deflexão de vigas por integração

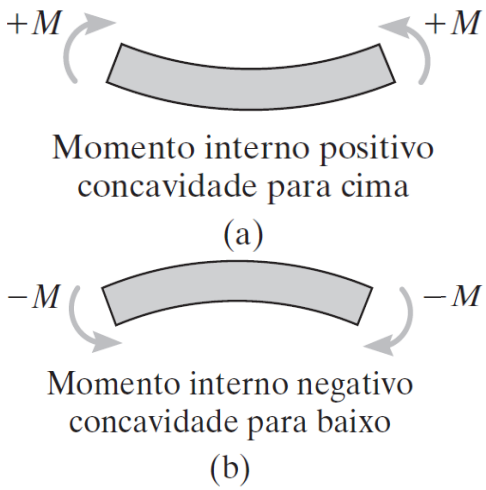
Muitas vezes é preciso limitar o grau de deflexão (deslocamento) que uma viga pode sofrer quando submetido a uma carga, portanto, iremos discutir um método para determinar a deflexão e inclinação em pontos específicos de vigas.

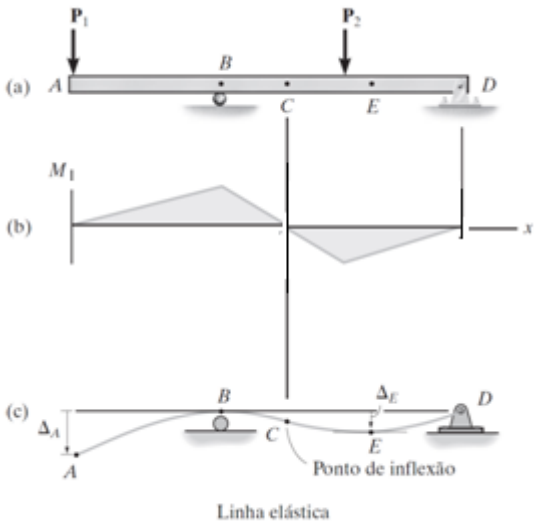
## A equação da linha elástica

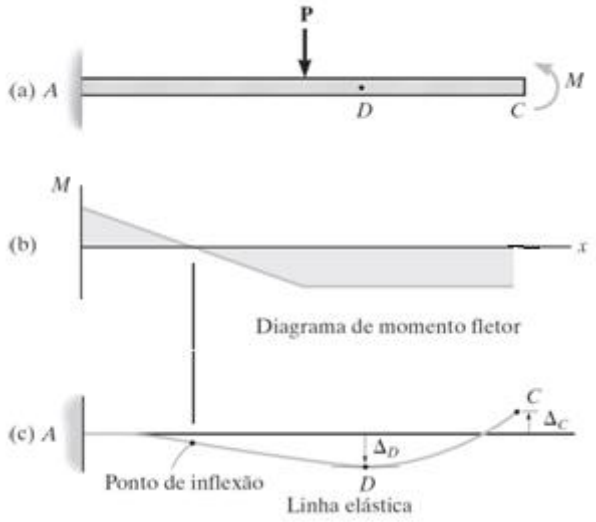
Antes de determinar a inclinação ou o deslocamento em um ponto de uma viga ou eixo, geralmente convém traçar um rascunho da forma defletida da viga quando carregada, de modo 'a visualizar' quaisquer resultados calculados e, com isso, fazer uma verificação parcial desses resultados. O diagrama da deflexão do eixo longitudinal que passa pelo centroide de cada área da seção transversal da viga é denominado **linha elástica.**

Para curva elástica,o momento positivo interno tende a curvar a viga com a concavidade para cima, e vice versa.

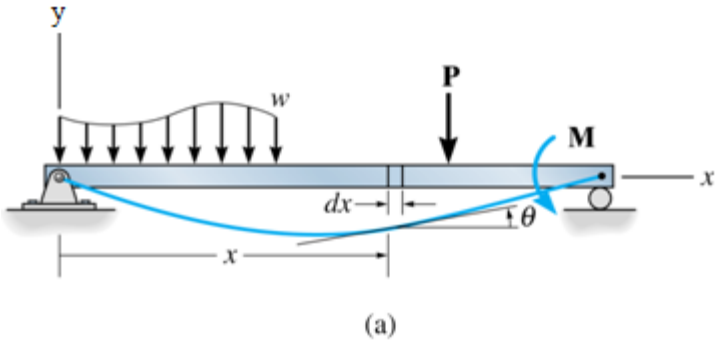
Deve haver um *ponto de inflexão*, onde a curva passa de côncava para cima a côncava para baixo, visto que o momento neste ponto é nulo.



Relação momento–curvatura (ρ):



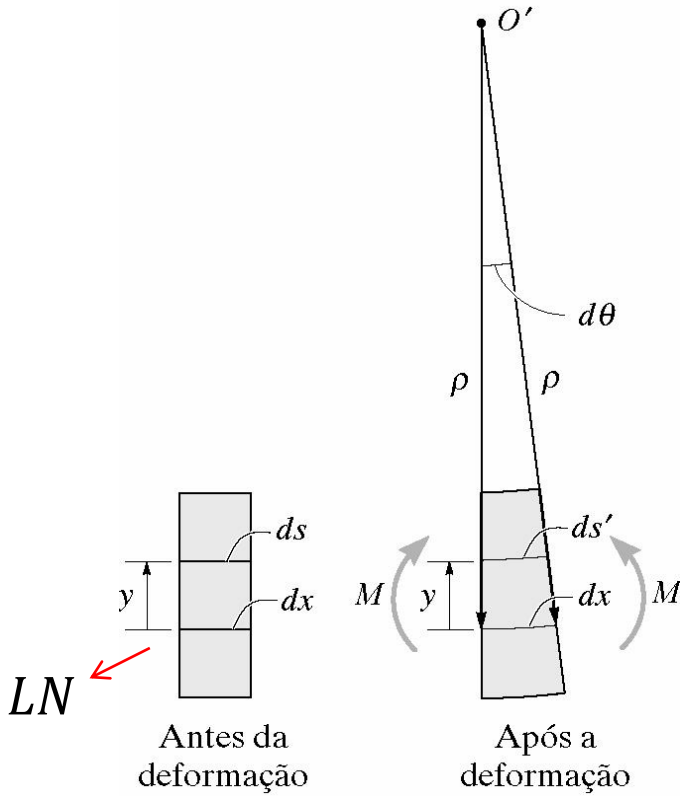

(a)

$$\varepsilon = \frac{ds' - ds}{ds} \qquad \theta = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \rho d\theta \qquad ds' = (\rho - y)d\theta$$

$$\varepsilon = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon}{y} = -\frac{\sigma}{Ey} = -\frac{-My}{EIy} = \frac{M}{EI}$$




(b)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

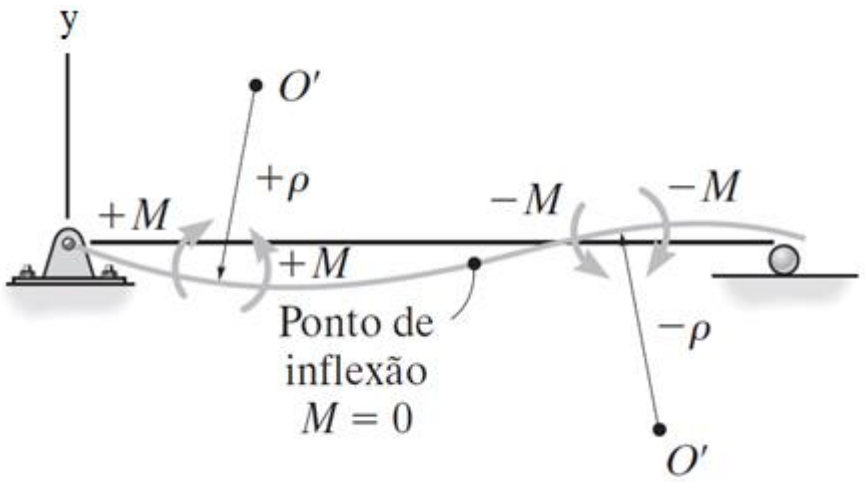
ρ = raio de curvatura em um ponto específico

M = momento fletor interno na viga no ponto ρ

E = módulo de elasticidade do material

I = momento de inércia calculado em torno do eixo neutro

EI = *rigidez à flexão*



# Inclinação e deslocamento por integração

- Na maioria dos problemas a rigidez à flexão (EI) será constante ao longo do comprimento da viga.
- A maioria dos livros de cálculo mostra que:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}$$

$\theta = dy/dx \longrightarrow$ muito pequena

$$\frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$

Também é possível escrever essa equação de duas formas alternativas.

Se diferenciarmos cada lado em relação a x e substituirmos V=dM/dx

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = V(x) \quad \Rightarrow \quad EI\frac{d^3y}{dx^3} = V(x)$$

Se diferenciarmos mais uma vez, usando –w=dV/dx

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^3y}{dx^3}\right) = -w$$

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -w(x) \qquad EI\frac{d^3y}{dx^3} = V(x) \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$

# Condições de contorno e continuidade

As constantes de integração são determinadas pela avaliação das funções para cisalhamento, momento, inclinação ou deslocamento. Esses valores são chamados de **condições de contorno.** Quando não forem suficientes, devemos usar as **condições de continuidade.**

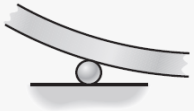
1

$\Delta = 0$
$M = 0$
Rolete

2

$\Delta = 0$
$M = 0$
Pino

3



$\Delta = 0$
Rolete

4

$\Delta = 0$
Pino

5

$\theta = 0$
$\Delta = 0$
Extremidade fixa

6

$V = 0$
$M = 0$
Extremidade livre

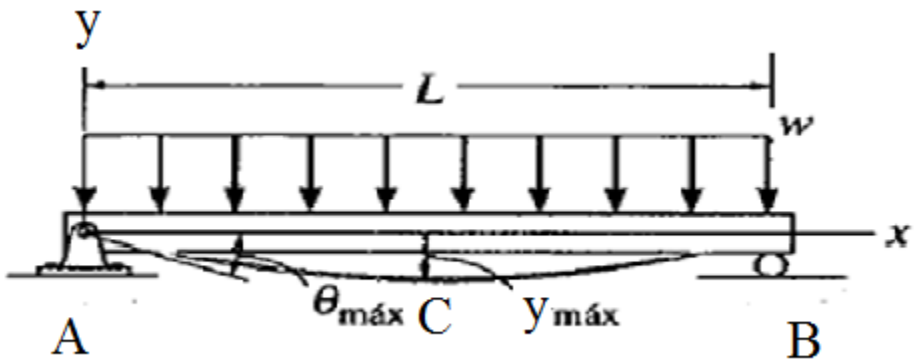
7

$M = 0$
Pino ou articulação interna

# Exercício de fixação-

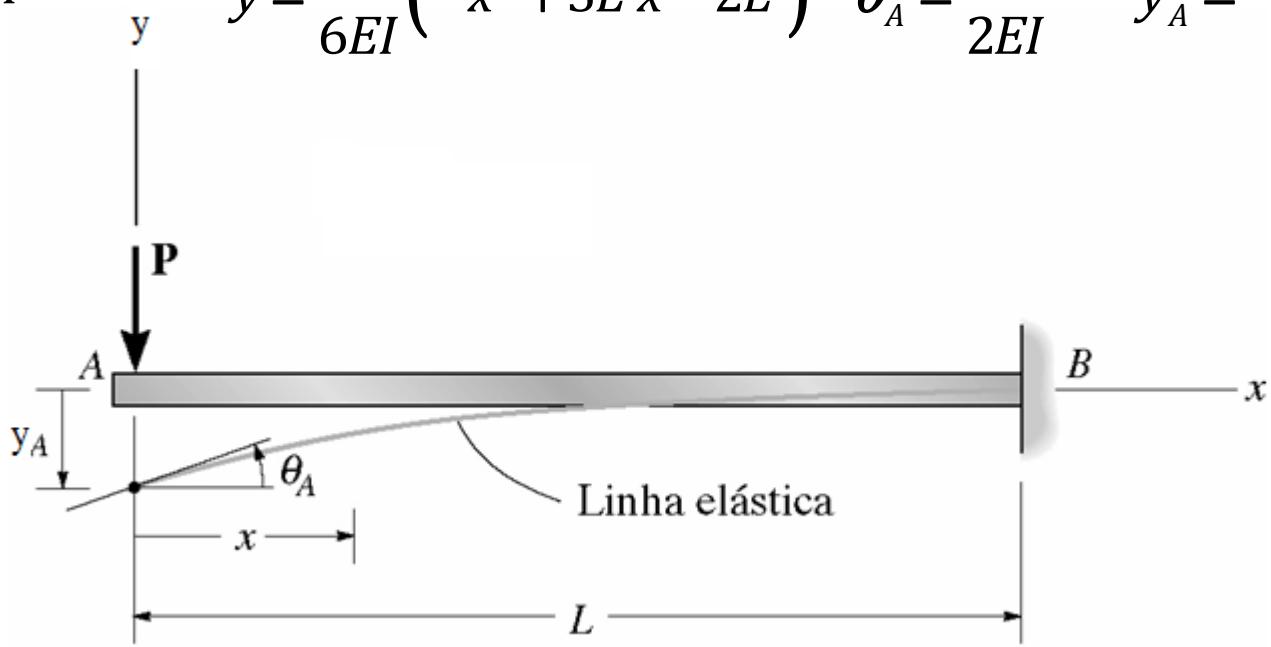
7) A viga prismática simplesmente apoiada AB suporta a carga uniformemente distribuída w por unidade de comprimento. Determinar a equação da linha elástica e a flecha máxima da viga.

Respostas: $y=\frac{-wx}{24EI}(L^3-2Lx^2+x^3)$ $\qquad y_{máx}=-\frac{5wL^4}{384EI}$



8)A viga em balanço mostrada abaixo está sujeita a uma carga vertical P em sua extremidade. Determine a linha elástica, $y_A$, $\theta_A$. EI é constante.

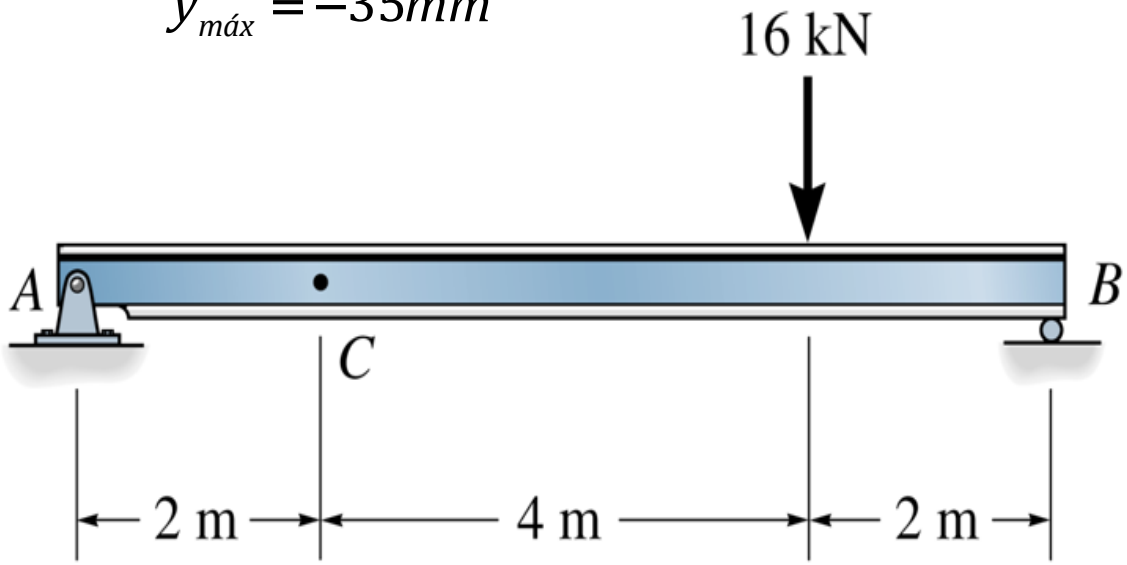
Respostas: $y = \frac{P}{6EI}\left(-x^3 + 3L^2x - 2L^3\right)$ $\theta_A = \frac{PL^2}{2EI}$ $y_A = -\frac{PL^3}{3EI}$



9)Determine a flecha no ponto C e a flecha máxima para a viga de aço abaixo. Considere $E_{aço}$=200GPa e I=17($10^6$)$mm^4$.

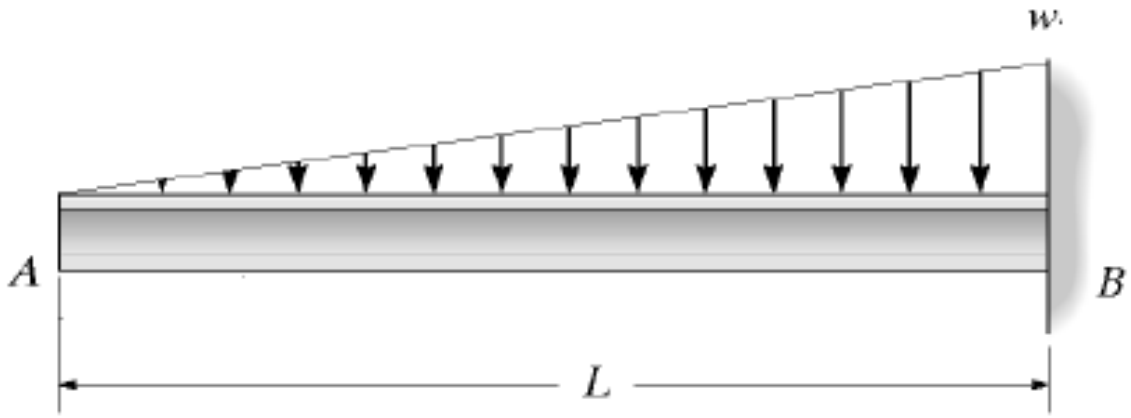
Respostas: $y_C = -21,96mm$

$y_{máx} = -35mm$



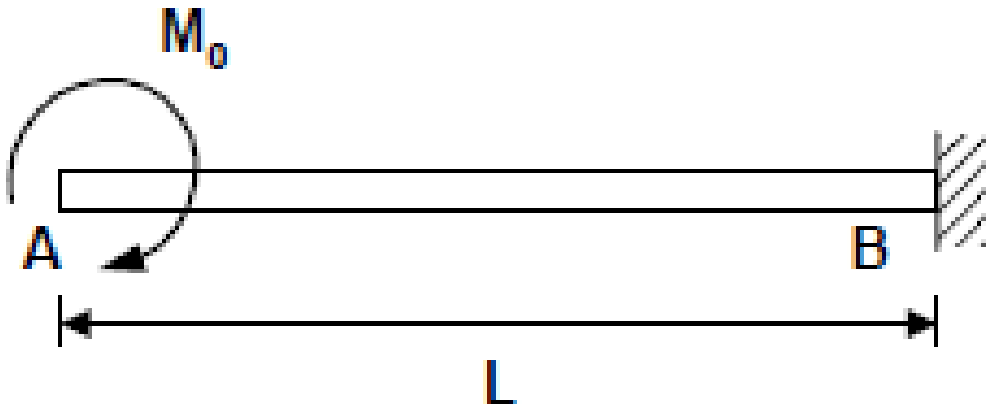
10)Determine a equação da linha elástica, flecha máxima e inclinação máxima.

Respostas: $y = \frac{w}{120EIL}(-x^5 + 5L^4x - 4L^5), y_{máx} = -\frac{wL^4}{30EI}, \theta_{máx} = \frac{wL^3}{24EI}$



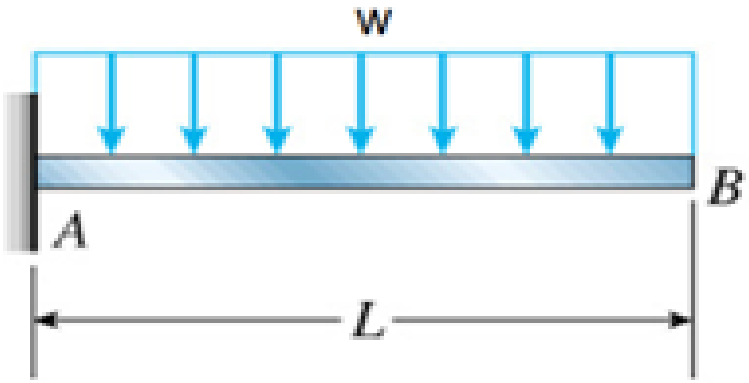
11)Para o carregamento mostrado determine a linha elástica, o afundamento e rotação no extremo livre.

Respostas: $y = \frac{Mo}{2EI}(x^2 - 2Lx + L^2)$ $y_A = \frac{MoL^2}{2EI}$ $\theta_A = -\frac{MoL}{EI}$

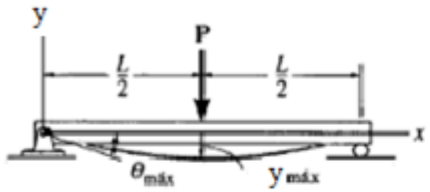
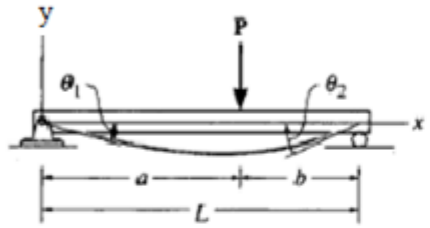
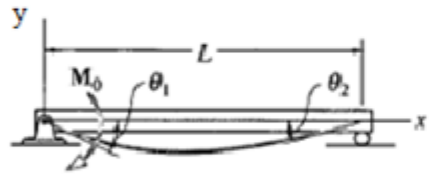
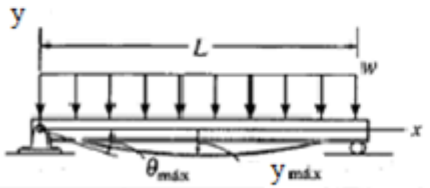
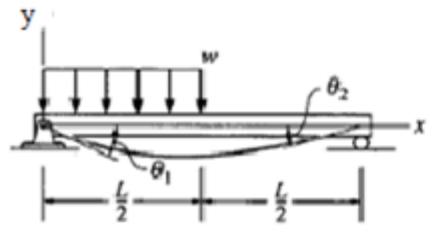


12)Para o carregamento mostrado determine a linha elástica, o afundamento e rotação no extremo livre.

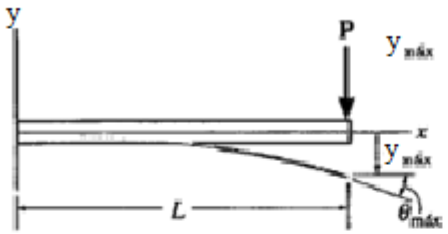
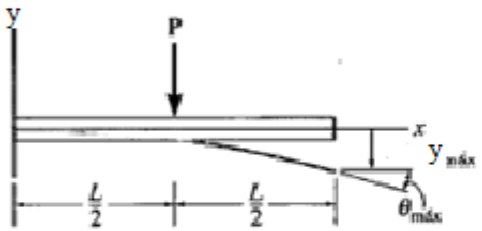
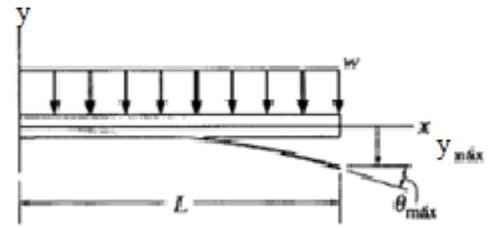
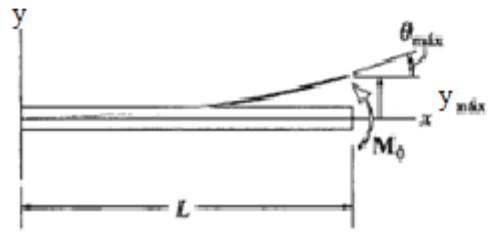
Respostas: $y = -\frac{wx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2), y_B = -\frac{wL^4}{8EI},\ \theta_B = -\frac{wL^3}{6EI}$



## Inclinações e Deslocamentos de Vigas Simplesmente Apoiadas

| Viga | Inclinação | Deslocamento | Linha elástica |
|---|---|---|---|
|  | $\theta_{máx} = \frac{-PL^2}{16EI}$ | $y_{máx} = \frac{-PL^3}{48EI}$ | $y = \frac{-Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$<br>$0 \le x \le L/2$ |
|  | $\theta_1 = \frac{-Pab(L+b)}{6EIL}$<br>$\theta_2 = \frac{Pab(L+a)}{6EIL}$ | $y\Big\|_{x=a} = \frac{-Pba}{6EIL}(L^2 - b^2 - a^2)$ | $y = \frac{-Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$<br>$0 \le x \le a$ |
|  | $\theta_1 = \frac{-M_0L}{3EI}$<br>$\theta_2 = \frac{M_0L}{6EI}$ | $y_{máx} = \frac{-M_0L^2}{\sqrt{243}EI}$ | $y = \frac{-M_0x}{6EIL}(x^2 - 3Lx + 2L^2)$ |
|  | $\theta_{máx} = \frac{-wL^3}{24EI}$ | $y_{máx} = \frac{-5wL^4}{384EI}$ | $y = \frac{-wx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$ |
|  | $\theta_1 = \frac{-3wL^3}{128EI}$<br>$\theta_2 = \frac{7wL^3}{384EI}$ | $y\Big\|_{x=L/2} = \frac{-5wL^4}{768EI}$<br>$y_{máx} = -0{,}006563\frac{wL^4}{EI}$<br>em $x = 0{,}4598L$ | $y = \frac{-wx}{384EI}(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$<br>$0 \le x \le L/2$<br>$y = \frac{-wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$<br>$L/2 \le x < L$ |

## Inclinações e Deslocamentos de Vigas em Balanço

| Viga | Inclinação | Deslocamento | Linha elástica |
|---|---|---|---|
|  | $\theta_{máx} = \frac{-PL^2}{2EI}$ | $y = \frac{-PL^3}{3EI}$ | $y = \frac{-Px^2}{6EI}(3L - x)$ |
|  | $\theta_{máx} = \frac{-PL^2}{8EI}$ | $y_{máx} = \frac{-5PL^3}{48EI}$ | $y = \frac{-Px^2}{6EI}(\frac{3}{2}L - x) \quad 0 \le x \le L/2$<br>$y = \frac{-PL^2}{24EI}(3x - \frac{1}{4}L) \quad L/2 \le x \le L$ |
|  | $\theta_{máx} = \frac{-wL^3}{6EI}$ | $y_{máx} = \frac{-wL^4}{8EI}$ | $y = \frac{-wx^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2)$ |
|  | $\theta_{máx} = \frac{M_0 L}{EI}$ | $y_{máx} = \frac{M_0 L^2}{2EI}$ | $y = \frac{M_0 x^2}{2EI}$ |

Fonte: Hibbeler 5ª Edição Resistência dos Materiais

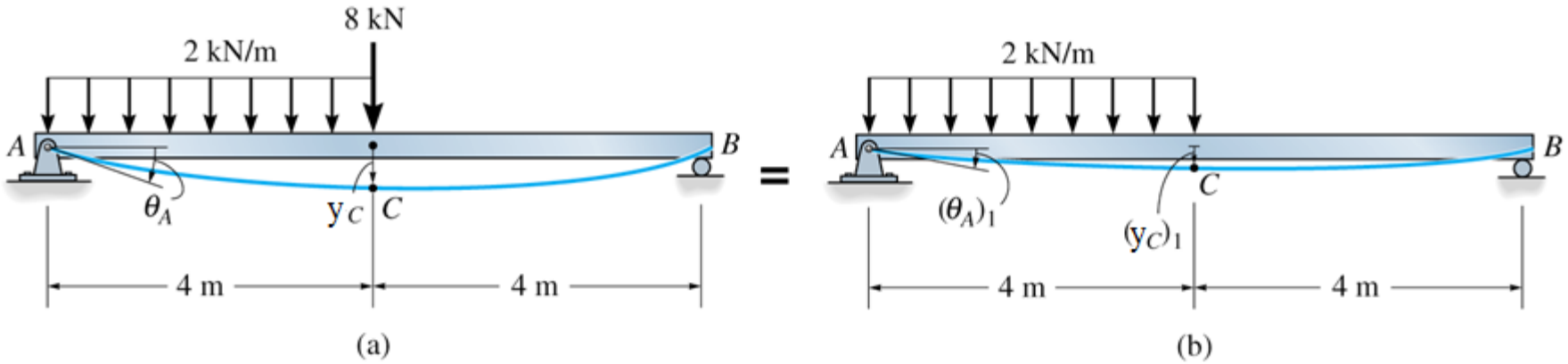
# Princípio da superposição dos efeitos

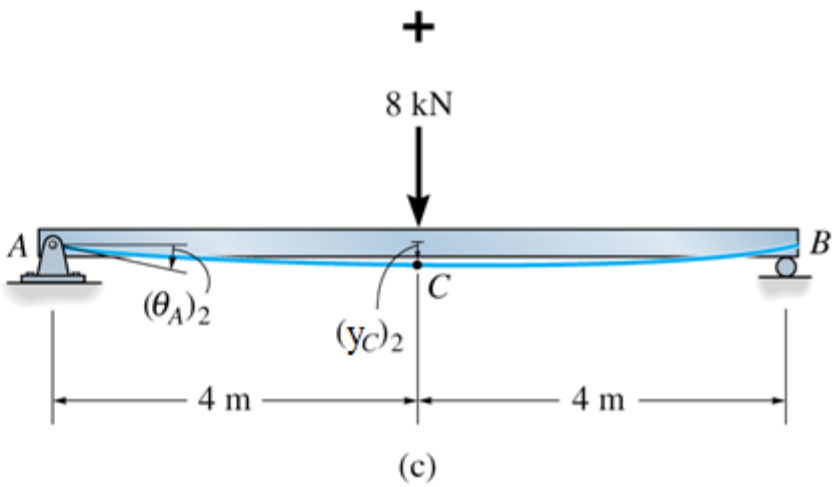
Para aplicar o princípio da superposição, as condições devem ser válidas:

1) O carregamento não deve provocar mudanças significativas na geometria ou configuração original do elemento.
2) A carga deve estar relacionada linearmente com a tensão ou o deslocamento a ser determinado.

# Exercício de fixação

13) Determine o deslocamento no ponto C e a inclinação no apoio A da viga.




Respostas: $y_C = -\dfrac{138{,}7 kNm^3}{EI}$

$\theta_A = -\dfrac{56 kNm^2}{EI}$